

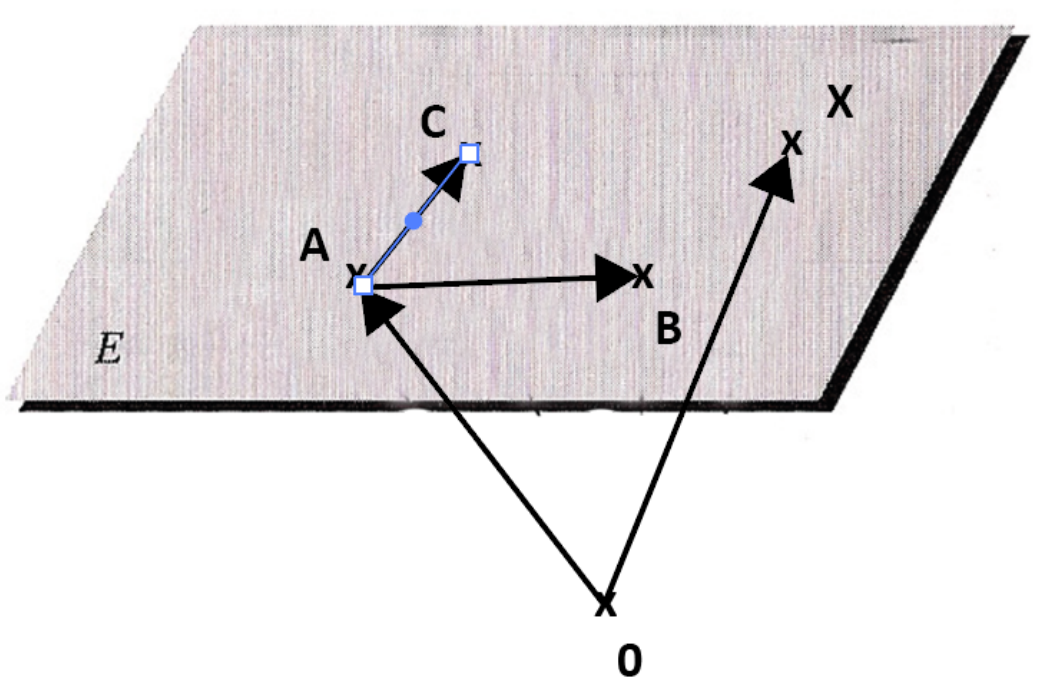
Instruktion

Ebenen im Raum



Parametergleichung einer Ebene

(1) Die Drei-Punkte-Form einer Ebene:



Eine Ebene E ist eindeutig durch die Angabe dreier Punkte A , B und C , die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, festgelegt.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}$$

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}$$

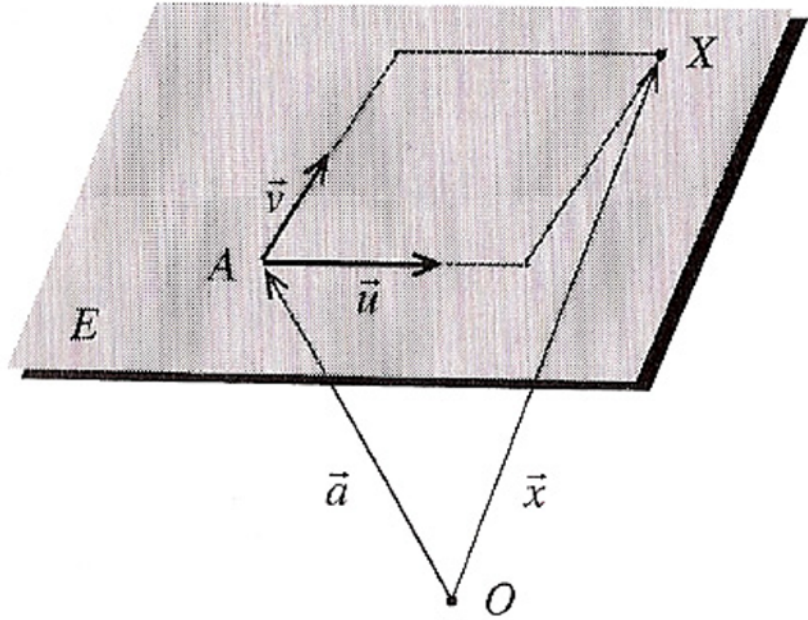
Beispiel:

Ermitteln Sie die Parametergleichung der Ebene E, die durch die Punkte A(2/1/-1), B(-2/3/0) und C(1/-3/2) festgelegt ist.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Die Punkt-Richtungsform der Ebenengleichung:



Eine Ebene E im Anschauungsraum ist durch die Angabe eines Punktes A und zweier nicht paralleler Richtungen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eindeutig festgelegt.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{u}, \vec{v} \text{ linear unabhängig}$$

Anwendungen:

- 1) Aufstellen einer Ebene, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h aufgespannt wird.

Aufhängepunkt der Ebene: beliebiger Punkt der Geraden g bzw. h

Richtungsvektoren der Ebene: Richtungsvektoren von g und h

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E:\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Aufstellen einer Ebene, die von zwei parallelen Geraden g und h aufgespannt wird.

Aufhängepunkt der Ebene: beliebiger Punkt der Geraden g bzw. h

Richtungsvektoren der Ebene: 1) Richtungsvektor der Geraden g bzw. h

2) Vektor von einem Punkt der Geraden g zu einem Punkt der Geraden h, z.B. Vektor zwischen den Aufhängepunkten von g und h

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$E:\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E:\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3) Aufstellen einer Ebene, die durch eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$ aufgespannt wird.

Aufhängepunkt der Ebene: beliebiger Punkt der Geraden g

Richtungsvektoren der Ebene: 1) Richtungsvektor der Gerade g

2) Vektor von einem Punkt der Geraden g zum Punkt P

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } P(3/4/6) \notin g$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Normalen- und Koordinatenform einer Ebene

Herleitung der Normalenform der Ebenengleichung:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Multiplikation mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene ($\vec{n} \perp \vec{u}$ und $\vec{n} \perp \vec{v}$) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} + s \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} \text{ (da } \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ und } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0)$$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

Koordinatenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + n_0 = 0$$

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{n}_E^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{Normalenform}$$

$$\Rightarrow E: 3(x_1 - 3) + 2(x_2 - 2) + 3(x_3 + 1) = 0 \quad \Rightarrow E: 3x_1 - 9 + 2x_2 - 4 + 3x_3 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow E: 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 0 \quad \text{Koordinatenform}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob der Ursprung in der Ebene E liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad 0 = 2 - 5s - 3t$$

$$(II) \quad 0 = -4 + 5s + 6t$$

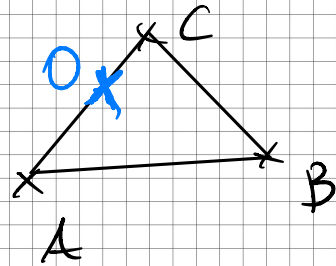
$$(III) \quad 0 = 4s \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = 0}$$

$$(I) \Rightarrow 0 = 2 - 3t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2}{3}}$$

Überprüfen mit (II):

$$0 = -4 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad (\text{w})$$

$\Rightarrow$ Ursprung liegt in E



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s=0 \quad t=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Ursprung liegt innerhalb des Dreiecks ABC.

Für s und t muss gelten:

$$(I) \quad 0 \leq s \leq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(II) \quad s+t \leq 1$$

Achsenabschnittsform einer Ebene

Definition:

Sind in einer Ebene mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 - d = 0$ alle Koeffizienten a , b , c und d verschieden von Null, so lässt sich diese Gleichung umwandeln in die Form:

$$\frac{x_1}{u} + \frac{x_2}{v} + \frac{x_3}{w} = 1 \quad (\text{Achsenabschnittsgleichung})$$

Aus der Achsenabschnittsgleichung lassen sich unmittelbar die Spurpunkte $S_1(u/0/0)$, $S_2(0/v/0)$ und $S_3(0/0/w)$ mit den Koordinatenachsen ablesen.

Beispiel:

$$E: 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$

$$E: 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6$$

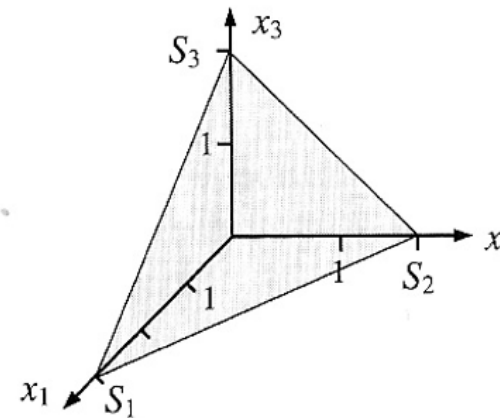
$$E: \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1$$

$$\Rightarrow E: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$$

$$S_1(3/0/0)$$

$$S_2(0/2/0)$$

$$S_3(0/0/2)$$



☐ in einer Ebene E
☐ drei Punkte

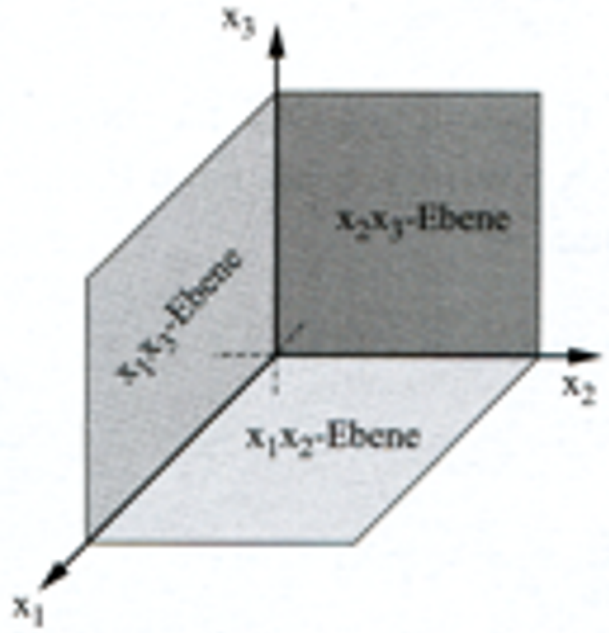
Koordinaten des Aufhängepunktes A und der

A3 u1 u2 u3

Gleichung der Ebene E ☒ Normalenform

Besondere Ebenen

1) Koordinatenebenen:



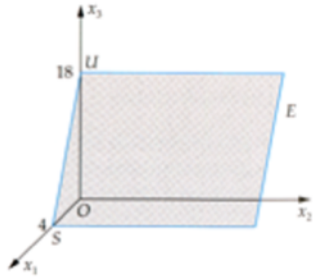
Gleichung der x_1 - x_2 -Ebene in Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

In Koordinatenform: $x_3 = 0$

x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

2) Ebene, die parallel zu einer Koordinatenachse liegt:



$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

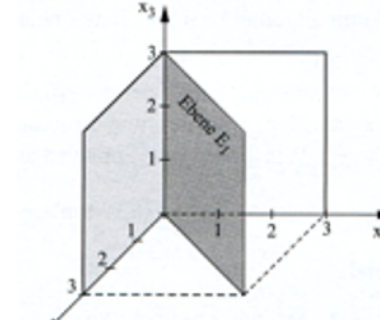
$$\Rightarrow E_1: 9x_1 + 2x_3 - 36 = 0$$

E_1 ist echt parallel zur x_2 -Achse, da $n_0 \neq 0$

$E_2: n_1x_1 + n_2x_2 + n_0 = 0$ | echt parallel zur x_3 -Achse

$E_3: n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ | echt parallel zur x_1 -Achse

Tritt in der Normalenform einer Ebene E eine Koordinate nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu dieser Koordinatenachse.



$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

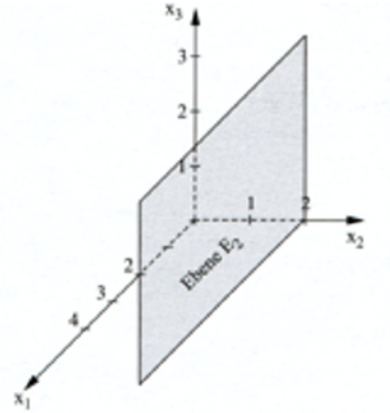
$$\Rightarrow E_1: x_1 - x_2 = 0$$

E_1 enthält die x_3 -Achse, da $n_0 = 0$

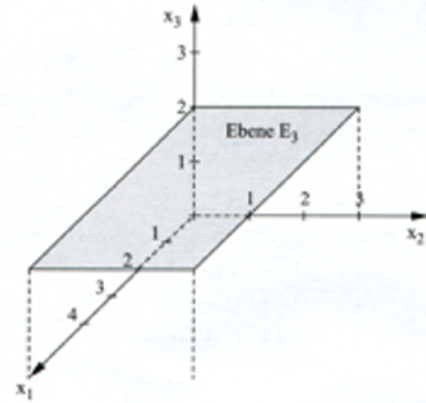
$E_2: n_1x_1 + n_3x_3 = 0$ (enthält die x_2 -Achse)

$E_3: n_2x_2 + n_3x_3 = 0$ (enthält die x_1 -Achse)

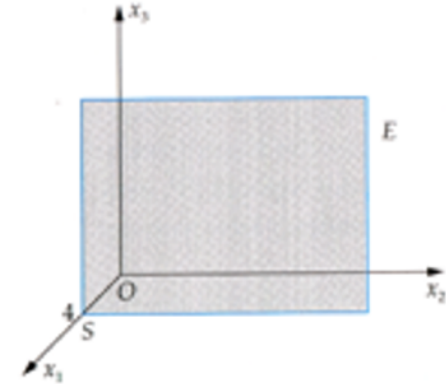
3) Ebene, die parallel zu zwei Koordinatenachsen liegt:



$$E: x_2 = 2 \Rightarrow E: x_2 - 2 = 0$$



$$E: x_3 = 2 \Rightarrow E: x_3 - 2 = 0$$



$$E: x_1 = 4 \Rightarrow E: x_1 - 4 = 0$$

Parallelebenen zu den Koordinatenebenen:

$$E_1: x_1 = a_1 \text{ (parallel zur } x_2\text{-}x_3\text{-Ebene)} \quad E_2: x_2 = a_2 \text{ (parallel zur } x_1\text{-}x_3\text{-Ebene)} \quad E_3: x_3 = a_3 \text{ (parallel zur } x_1\text{-}x_2\text{-Ebene)}$$

Treten in der Normalform einer Ebene E zwei Koordinaten nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu der Ebene, die durch die Koordinatenachsen der fehlenden Koordinaten aufgespannt wird.

Neue Aufgabe

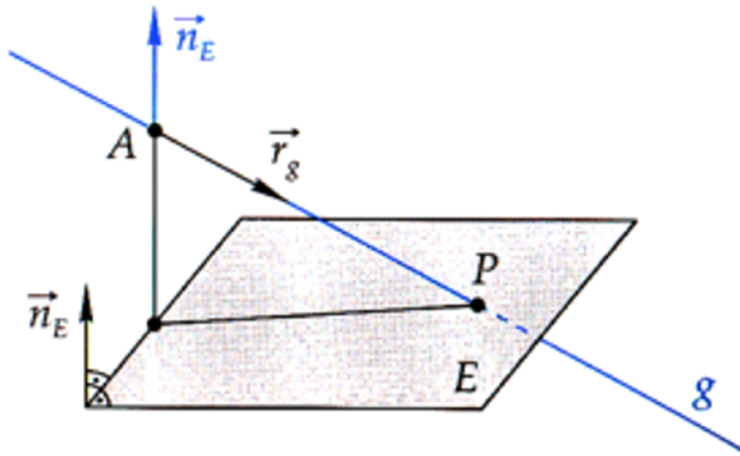
Gleichung der Ebene E lautet: $E: x$

E liegt echt parallel zur x_2 -Achse

Wahr Falsch

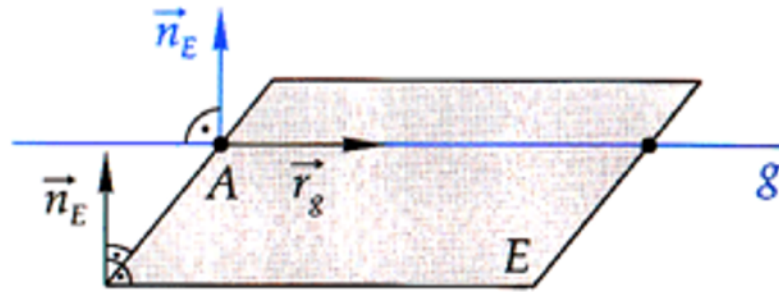
Lagebeziehung Gerade - Ebene

1) g und E schneiden sich



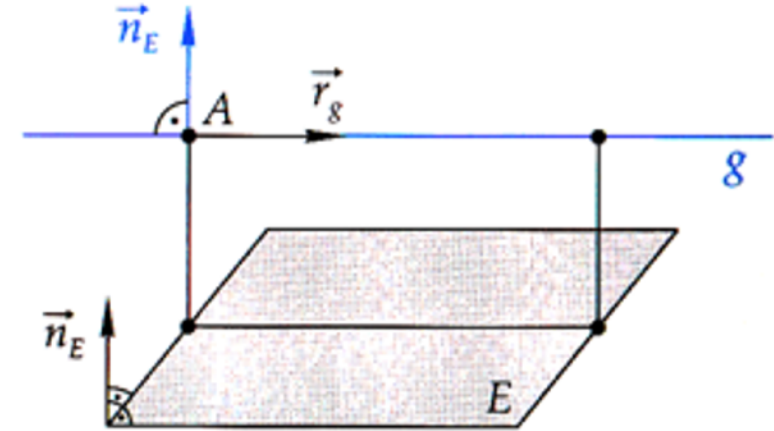
$\vec{n}_E \cdot \vec{r}_g \neq 0$: Die Gerade g durchstößt
die Ebene E in genau einem Punkt P.

2) g liegt ganz E



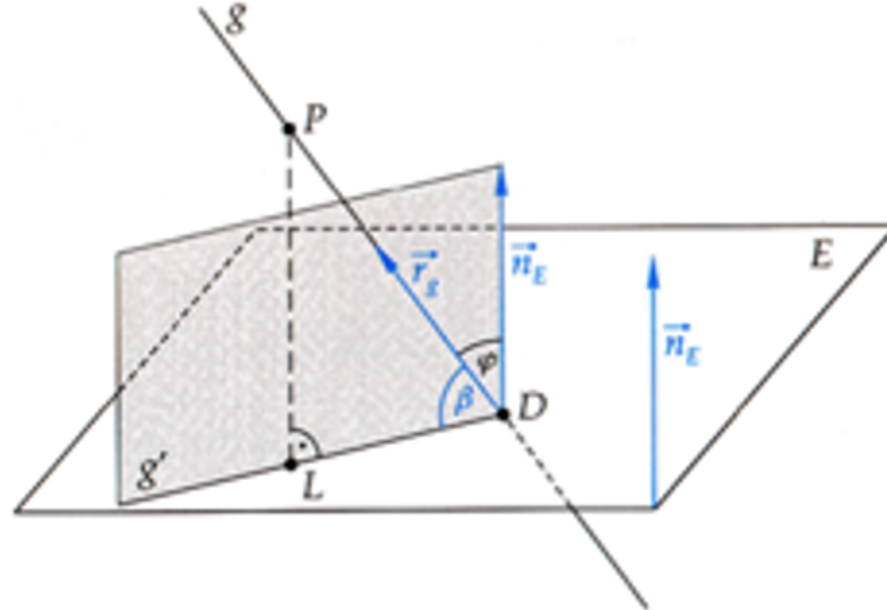
$\vec{n}_E \cdot \vec{r}_g = 0$ und der Aufhängepunkt A
der Geraden g ist auch ein
Punkt der Ebene E.

3) g ist echt parallel zu E



$\vec{n}_E \cdot \vec{r}_g = 0$ und der Aufhängepunkt A
der Geraden g liegt nicht in der Ebene E.

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene



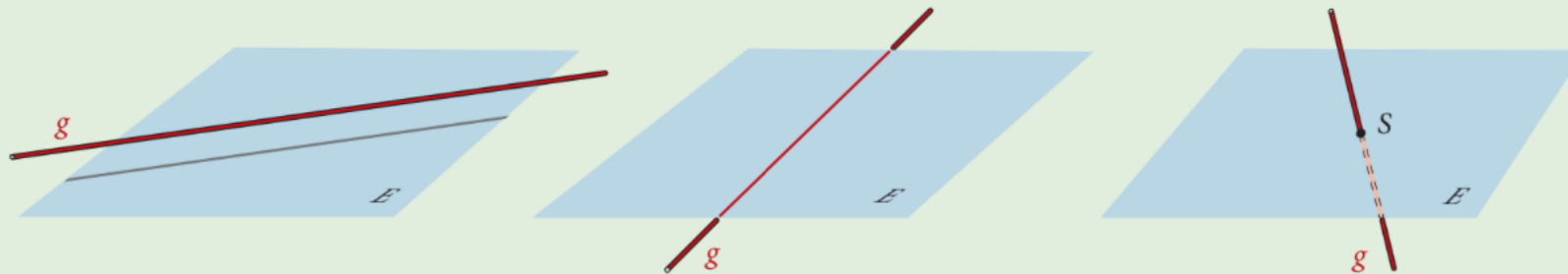
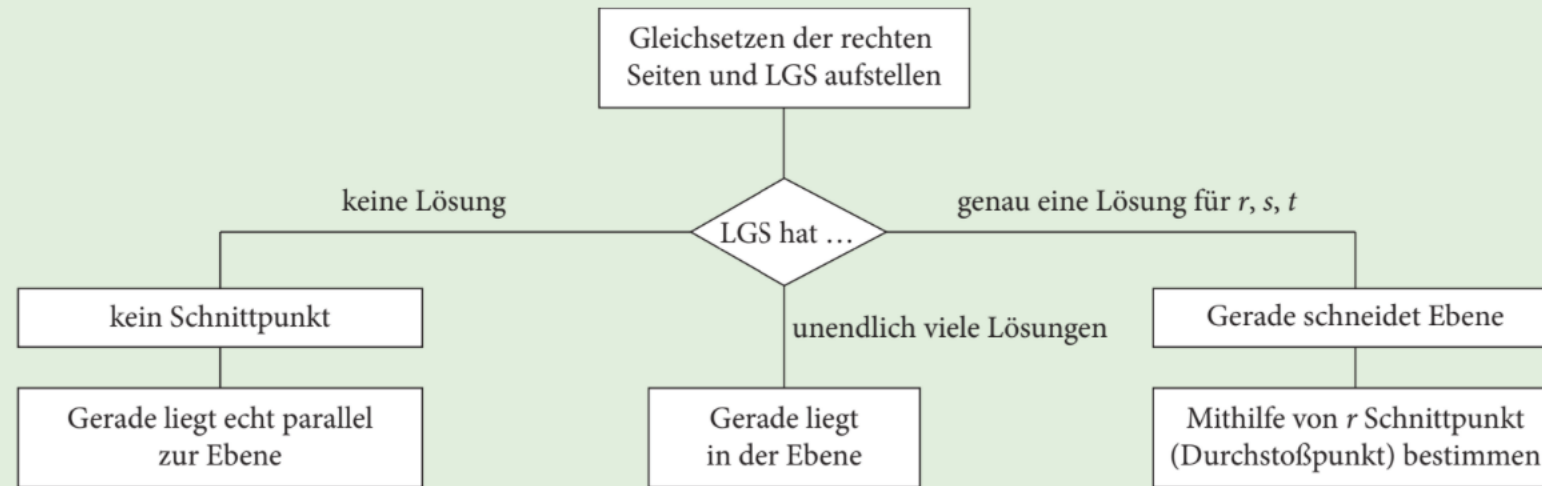
1. Möglichkeit: $\cos \varphi = \frac{|\vec{r}_g \circ \vec{n}_E|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{n}_E|} \Rightarrow \beta = 90^\circ - \varphi$

2. Möglichkeit: $\sin \beta = \frac{|\vec{r}_g \circ \vec{n}_E|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{n}_E|}$ und $0^\circ < \beta < 90^\circ$

Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der Lagebeziehung Gerade-Ebene

1. Möglichkeit:

Ist eine **Ebene in Parameterform** $E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ gegeben, so kann die **Lagebeziehung** zwischen dieser Ebene und einer **Geraden** $g: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{w}$ mit $r \in \mathbb{R}$ wie folgt überprüft werden:



2. Möglichkeit:

Ist eine Ebene in Koordinatenform gegeben, liefert das Einsetzen der Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung eine Gleichung mit einer Unbekannten.

- Ist die Gleichung eindeutig lösbar, so schneiden sich Gerade und Ebene in einem Punkt.
- Hat die Gleichung unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade in der Ebene.
- Hat die Gleichung keine Lösung, so ist die Gerade echt parallel zur Ebene.

Beispiele:

1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$$E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 15 = 0 \text{ und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und geben Sie}$$

gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an.

$$\text{Einsetzen der Koordinatengleichungen von } g \text{ in die Ebene } E: 3 \cdot (-2 + 2t) - 4 \cdot (5 - 3t) + (3 + t) - 15 = 0$$

$$19t - 38 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes: } \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2 / -1 / 5)$$

2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$$E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 20 = 0 \text{ und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2 \cdot (-2 - t) - (-4 + 2t) + 4 \cdot (5 + t) - 20 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow \text{die Gerade } g \text{ liegt ganz in der Ebene } E$$

3 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$$E: -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 20 = 0 \text{ und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$-2 \cdot (-2 - t) + (3 + 2t) - 4 \cdot (-5 + t) + 20 = 0 \quad \Rightarrow 47 = 0 \quad \Rightarrow \text{die Gerade } g \text{ liegt echt parallel zur Ebene } E$$

4 Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -k+1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$ mit $s, k \in \mathbb{R}$ sowie die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 9 = 0$.

Ermitteln Sie die Lagebeziehung der Geraden g_k zur Ebene E in Abhängigkeit von k .

$$(-3 - s \cdot k + s) + 2 \cdot (4 + 2s) - 2(1 + s \cdot k) - 9 = 0 \quad -3 - s \cdot k + s + 8 + 4s - 2 - 2s \cdot k - 9 = 0$$

$$\Rightarrow -3s \cdot k + 5s - 6 = 0 \quad \Rightarrow s \cdot (-3k + 5) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{3}: g_{\frac{5}{3}} \text{ echt parallel zu } E$$

$$\Rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{3} \right\}: g_k \text{ und } E \text{ schneiden sich in einem Punkt}$$

Abhängigkeit zwischen

die die Koordinaten des Aufhängepunktes

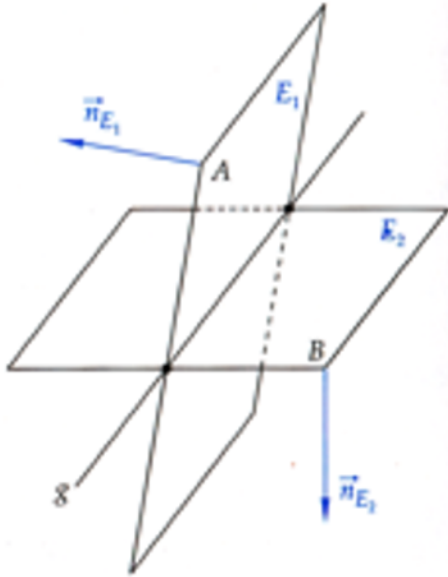
A2: 3 A3: -5 u1: -1 u2: 2

Sie die Werte n_1 , n_2 , n_3 und n_0 für die Ebene

$n_1: 1 \quad n_2: -4 \quad n_3: 2 \quad n_0: -9$

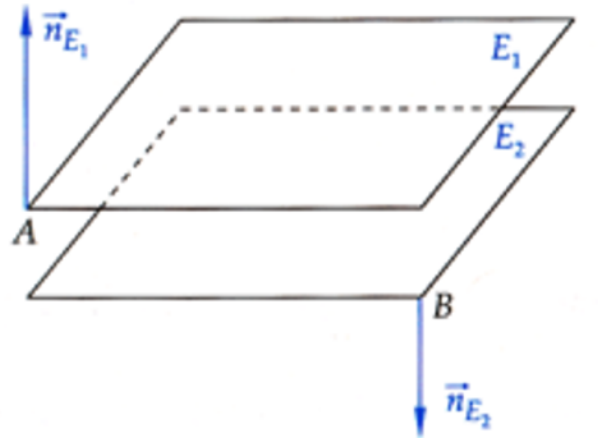
Lagebeziehung Ebene - Ebene

1) E_1 und E_2 schneiden sich



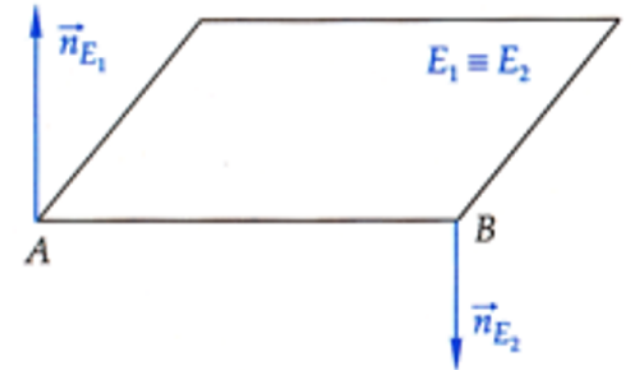
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear unabhängig.
Als Schnittgebilde ergibt sich eine Gerade g .

2) E_1 und E_2 echt parallel



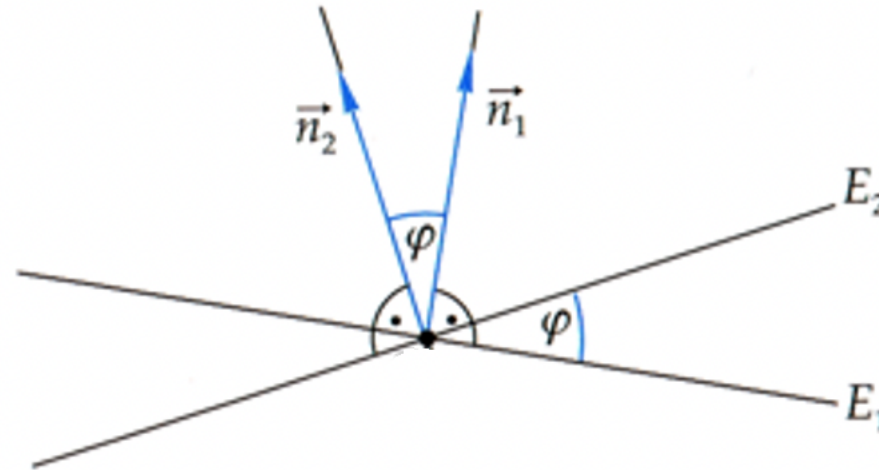
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear abhängig, aber ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 liegt nicht in der Ebene E_2 .

3) E_1 und E_2 sind identisch



Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear abhängig, aber ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 liegt in der Ebene E_2 .

Schnittwinkel zwischen Ebene und Ebene



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{E_1} \circ \vec{n}_{E_2}|}{|\vec{n}_{E_1}| \cdot |\vec{n}_{E_2}|} \quad \text{und } 0^\circ < \varphi < 90^\circ$$

Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der Lagebeziehung Ebene-Ebene

1. Möglichkeit:

Zwei **Ebenen in Parameterform**, $E: \vec{x} = \vec{p}_1 + a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{v}_1$ und $F: \vec{x} = \vec{p}_2 + c \cdot \vec{u}_2 + d \cdot \vec{v}_2$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, werden auf ihre **Lagebeziehung** zueinander überprüft, indem man die rechten Seiten der Gleichungen gleichsetzt und das resultierende lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den vier Variablen a, b, c, d auf Stufenform bringt.

- Erhält man einen **Widerspruch**, so sind die beiden Ebenen **echt parallel**.
- Erhält man eine **Nullzeile**, so sind die beiden Ebenen **identisch**.
- Kann man die Variable c durch die Variable d ausdrücken (oder auch a durch b), so schneiden sich die Ebenen in einer **Schnittgeraden**. Deren Gleichung erhält man, indem man den gefundenen Zusammenhang in die entsprechende Ebenengleichung einsetzt und zusammenfasst.

2. Möglichkeit:

Die **Lagebeziehung** zwischen einer **Ebene in Koordinatenform** $E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ und einer **Ebene in Parameterform** $F: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ wird überprüft, indem man die durch die Parameterform von F gegebenen Koordinaten in die Koordinatengleichung von E einsetzt.

- Hat die Gleichung **keine** Lösung, so sind die beiden Ebenen **echt parallel**.
- Hat die Gleichung unabhängig von den Parametern **unendlich viele** Lösungen, so sind die beiden Ebenen **identisch**.
- Lässt sich einer der Parameter s bzw. t durch den anderen ausdrücken, so schneiden sich die beiden Ebenen in einer **Schnittgeraden**. Deren Gleichung erhält man, indem man den Zusammenhang in die Parametergleichung von F einsetzt.

3. Möglichkeit:

Zwei **Ebenen in Koordinatenform** werden auf ihre **Lagebeziehung** zueinander überprüft, indem man aus den beiden Gleichungen ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen x_1 , x_2 und x_3 bildet. Bringt man das LGS auf Stufenform, so gilt:

- Erhält man einen **Widerspruch**, so sind die beiden Ebenen **echt parallel**.
- Erhält man eine **Nullzeile**, so sind die beiden Ebenen **identisch**.
- Ist genau **eine Variable frei wählbar**, so schneiden sich die Ebenen in einer **Schnittgeraden**. Deren Gleichung erhält man, indem man die gefundene Lösungsmenge als Vektorgleichung notiert.

Beispiele:

1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E_1: 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 25 = 0 \text{ und } E_2: -4x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 30 = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & -25 \\ -4 & 10 & -6 & -30 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -160 \end{array} \right)$$

Das LGS hat keine Lösung, also sind die beiden Ebenen echt parallel zueinander.

Alternative: $\vec{n}_{E_1}$ und $\vec{n}_{E_2}$ sind linear abhängig $\Rightarrow E_1$ und E_2 sind identisch oder echt parallel

Bestimmung eines Punktes P der Ebene E_1 und einsetzen in E_2 : wähle z.B. $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$

$$\Rightarrow -5x_2 + 25 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 \Rightarrow P(0/5/0)$$

$$P \text{ in } E_2 \text{ einsetzen: } 10 \cdot 5 + 30 = 0 \Rightarrow 80 = 0 \Rightarrow P \notin E_2$$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind echt parallel

2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$E_1: 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 62 = 0$ und $E_2: 3x_1 - 4x_3 - 24 = 0$ und geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$\begin{array}{l} \text{I} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 62 \\ 3 & 0 & -4 & 24 \end{array} \right) \\ \text{II} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 62 \\ 0 & -3 & -25 & -90 \end{array} \right) \end{array}$$

$$(II) \Rightarrow -3x_2 - 25x_3 = -90 \quad \text{wähle } x_3 = r \quad -3x_2 - 25r = -90 \quad \Rightarrow x_2 = 30 - \frac{25}{3}r$$

$$(I) \Rightarrow 4x_1 + \left(30 - \frac{25}{3}r\right) + 3r = 62 \quad \Rightarrow 4x_1 + 30 - \frac{16}{3}r = 62 \quad \Rightarrow 4x_1 = 32 + \frac{16}{3}r \quad x_1 = 8 + \frac{4}{3}r$$

$$x_1 = 8 + \frac{4}{3}r$$

$$x_2 = 30 - \frac{25}{3}r$$

$$x_3 = 0 + 1r$$

$$\Rightarrow s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{25}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder: } s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung zwischen zwei

n_1, n_2, n_3 und n_0 der Ebene E mit der Gleich

n_3 n_0

n_1, n_2, n_3 und n_0 der Ebene H mit der Gleich

n_3 n_0

Geometrische Deutung linearer Gleichungssysteme

1) Eine lineare Gleichung mit drei Variablen

Beispiel: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

Man kann diese Gleichung auch als lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also zweifach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösungsmenge sind deshalb zwei Variablen frei wählbar.

$$x_2 = s \quad x_3 = t \quad \Rightarrow x_1 + s - t = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - s + t \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Parametergleichung einer Ebene.

Jede lineare Gleichung der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit d mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei einer der Koeffizienten a, b, c verschieden von Null ist, beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

2) Zwei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

$$(I) -x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$(II) 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$$(I) -x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$(II) -x_2 = 4$$

$$x_2 = -4 \quad x_3 = s \quad \Rightarrow -x_1 + 4 + s = 1 \Rightarrow x_1 = 3 + s \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten entspricht der Untersuchung der Lagebeziehung der beiden Ebenen.

Hat das lineare Gleichungssystem eine Lösung mit einer frei wählbaren Variablen, dann schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden.

Hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, sind die beiden Ebenen echt parallel.

Hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen (eine Nullzeile), dann sind die beiden Ebenen identisch.

3) Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$(II) \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$

$$(III) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$(II) \quad -2x_2 - 5x_3 = -10$$

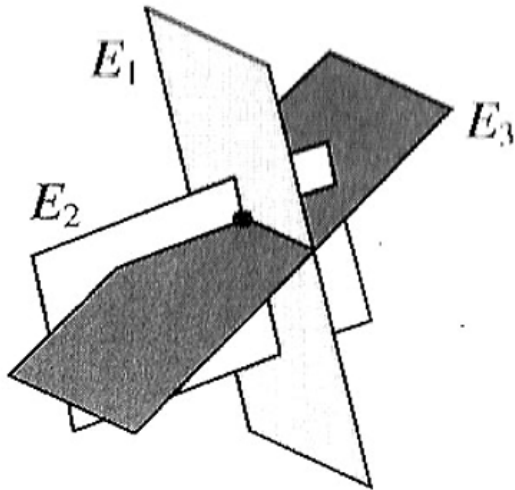
$$(III) \quad 11x_3 = 22$$

Als Lösung ergibt sich dann: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

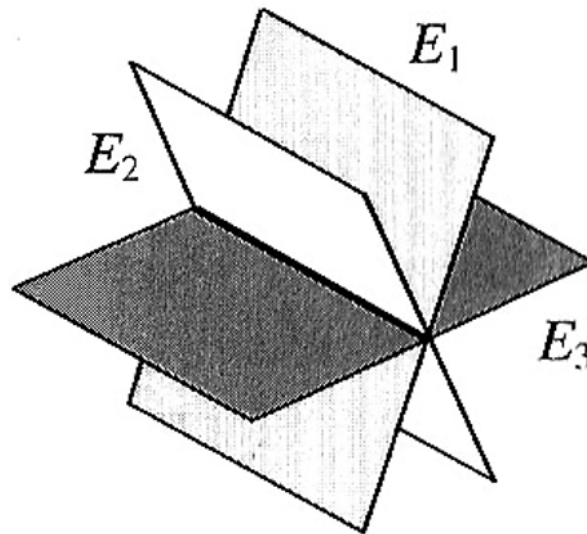
Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten entspricht der Untersuchung der Lagebeziehung dreier Ebenen.

Bezüglich der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

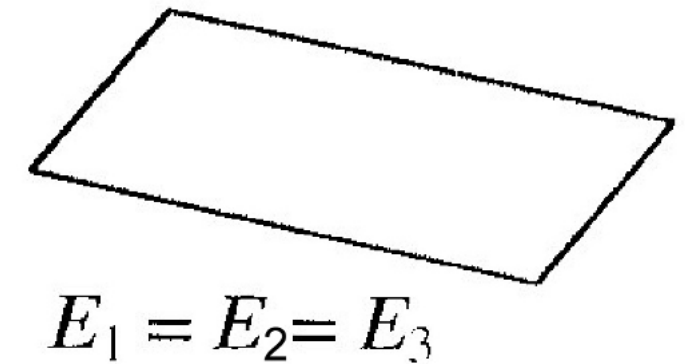
(1) Das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.



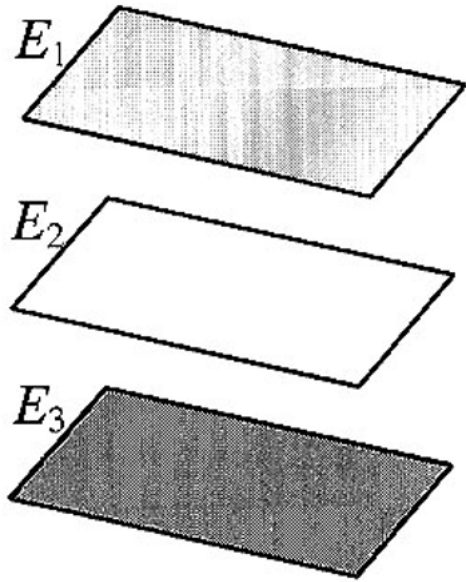
(2) Das LGS ist mehrdeutig lösbar mit einer frei wählbaren Variablen (eine Nullzeile in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen besitzen eine gemeinsame Schnittgerade.



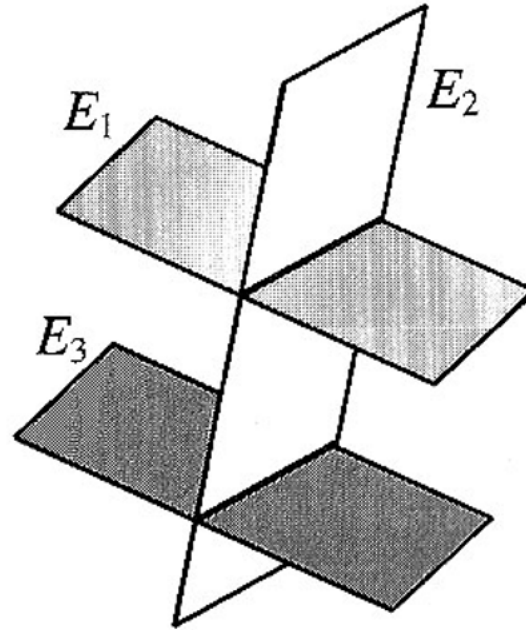
(3) Das LGS ist mehrdeutig lösbar mit zwei frei wählbaren Variablen (zwei Nullzeilen in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen sind identisch.



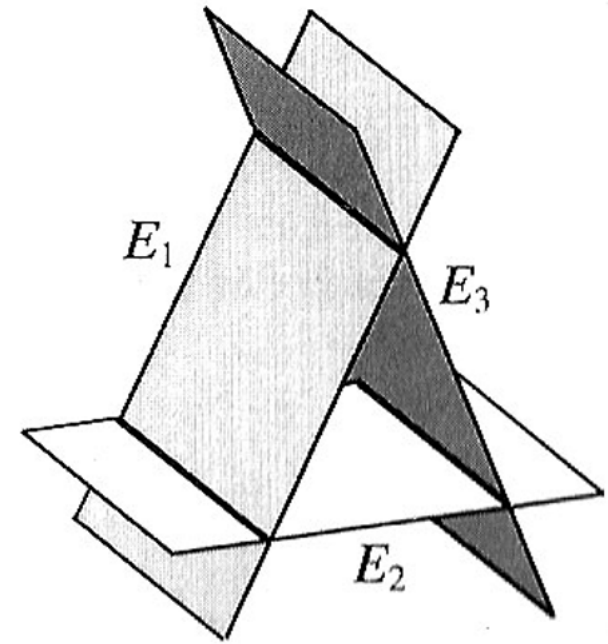
(4) Das LGS ist unlösbar



Die drei Ebenen sind parallel und verschieden.



Zwei der Ebenen sind parallel und verschieden.



Kein Ebenenpaar ist parallel.
Je zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden.